Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Al doilea test de selecţie pentru juniori
Bucureşti, 9 mai 2009

Problema 1. Să se determine numerele naturale a, b, c, d astfel încât:

$$7^a = 4^b + 5^c + 6^d.$$

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal şi O intersecţia diagonalelor AC şi BD. Perpendicularele din O pe laturile patrulaterului intersectează AB, BC, CD, DA în M, N, P, Q, respectiv, şi taie CD, DA, AB, BC în M', N', P', Q', respectiv. Să se demonstreze că punctele M, N, P, Q, M', N', P', Q' se află pe un cerc.

Problema 3. Considerăm $A_0A_1 \cdots A_{n-1}$, $n \geq 3$, un poligon regulat şi $m \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $m \neq n/2$. Pentru fiecare indice $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, notăm cu $r(i)$ restul împărţirii la n a numărului $i + m$. Să se arate că nu există trei segmente concurente de forma $A_iA_{r(i)}$.

Problema 4. Fie $a, b, c > 0$ numere reale cu suma 3. Să se arate că:

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3.$$

Timp de lucru 4 ore
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte